



SIMPOSIO NACIONAL DE INDUSTRIA

Título

Coeficientes de corrección límites para la condición de interferencia en engranajes cilíndricos con contacto interior

Title

Limit rack shift coefficients for the interference in cylindrical internal gears

Robert Hernández Ortega¹

1-Robert Hernández Ortega. Universidad Central Marta Abreu de Las Villas, Cuba. E-mail: robertho@uclv.edu.cu

Resumen

En la actualidad, un procedimiento utilizado para la selección de los coeficientes de corrección en las transmisiones por engranajes cilíndricos es el método de los contornos de bloqueo, desarrollado, de manera gráfica en la década del 60 por ingenieros rusos. Para lograr su construcción de forma automatizada y no interactiva, y así abrir otras perspectivas en el diseño de transmisiones por engranajes cilíndricos con contacto interior, en el presente trabajo se expone el análisis matemático desarrollado para obtener el algoritmo que permite obtener los coeficientes de corrección límites para los diferentes tipos de interferencia que existen en estas transmisiones.

Palabras claves: Engranajes Cilíndricos; Coeficientes de Corrección; Interferencia

Abstract: Currently, a procedure used for the selection of generating rack shift coefficients in cylindrical gear transmissions is the blocking contour method, developed graphically in the 1960s by Russian engineers. To achieve its construction in an automated and non-interactive way, and thus open other perspectives in the design of



transmissions by cylindrical gears with internal contact, in the present work the mathematical analysis developed to obtain the algorithm that allows obtaining the limit generating rack shift coefficients is exposed for the different types of interference that exist in these transmissions.

Keywords: Cylindrical Gears; Correction Coefficients; Interference

1. Introducción

Los Contornos de Bloqueo son un método gráfico, cuyos principios fundamentales para su construcción fueron desarrollados por el ingeniero ruso Israel Bolotovski hace más de 60 años. Esta técnica consiste en la introducción en un sistema de coordenadas: coeficiente de corrección de la rueda (x_2) versus coeficiente de corrección del piñón (x_1), las curvas que definen las restricciones geométricas de socavado, interferencia, factor de recubrimiento y aguzamiento del diente, para una combinación definida de números de dientes y parámetros de la herramienta normalizada. El conjunto de valores de x_1 y x_2 encerrados por estas curvas define la zona de existencia o dominio de la transmisión.

El desarrollo actual del método de los Contornos de Bloqueo se ha orientado hacia la automatización. En la bibliografía especializada se reportan varias aplicaciones, que, con mayor o menor grado de elaboración, posibilitan la obtención del Contorno de Bloqueo para cualquier combinación de números de dientes y parámetros de la cremallera de referencia. Entre ellas se destacan los trabajos realizados por los autores Sholenikov [3], Nenov [4], Goldfarb [5] y Dorofeev [6] en el dominio de las transmisiones por engranajes cilíndricos con contacto exterior y de Kolotov [7], Němček [8], Petrovskii [9], y Timofieyev [10] en el caso de las transmisiones por engranajes cilíndricos con contacto interior. Sin embargo, en estas aplicaciones la construcción del contorno se realiza de forma interactiva con el usuario, o sea, de forma gráfica. Ello implica que los resultados de la construcción del contorno tales como las distancias entre centros mínima y máxima y los coeficientes de corrección mínimo y máximo para un valor de corrección sumaria definido, no pueden utilizarse directamente



en establecer la correlación geométrica entre los parámetros que definen una transmisión por engranajes. En esta investigación se realiza un análisis matemático de las expresiones que definen las limitaciones geométricas de la interferencia radial, del despuntado de la cabeza del diente de la rueda y de la interferencia de la cabeza del diente de la rueda con el pie del diente del piñón para obtener un modelo matemático que permita la obtención de los coeficientes de corrección límites de forma numérica y sin interacción con el usuario de la aplicación.

2. Metodología

2.1. Aspectos generales para la determinación de los coeficientes de corrección límites

En este trabajo se asume que el piñón se elabora por el método de generación con fresa madre, mientras que la rueda se obtiene por el método de generación con piñón mortajador. Además, se consideran conocidos los siguientes datos:

- m: Módulo.
- β : Ángulo de inclinación del diente en el diámetro de referencia.
- $z_{1,2}$: Número de dientes del piñón (1) y de la rueda (2).

Y los parámetros de la cremallera de referencia:

- ha^* : Coeficiente de altura de
- ρ^* : Radio de redondeo
- c^* : Coeficiente de holgura
- α : Ángulo de presión

Las limitaciones geométricas que se abordan en este trabajo son las siguientes [1, 2]:

1. El despuntado de la cabeza del diente de la rueda, que se evita si se cumple la condición:

$$\frac{d_{o2}}{2} \tan(\alpha_{at2}) - \left(\frac{d_{o2}}{2} - \frac{d_{oM}}{2} \right) \tan(\alpha_{Mwt}) \geq \frac{d_{oM}}{2} \tan(\alpha_t) - \frac{2d_{oM}(ha^* + c^* - \rho^* + \rho^* \sin(\alpha) - x_M) \cos(\beta)}{z_M \cdot \sin(2\alpha_t)} \quad (1)$$

$d_{o1,2}$: Diámetro de la circunferencia básica del piñón (1) y de la rueda (2):

$$d_{o1,2} = \frac{m \cdot z_{1,2} \cdot \cos(\alpha_t)}{\cos(\beta)} \quad (\text{mm}) \quad (2)$$

α_t : Ángulo de presión del contorno de referencia en el plano frontal.



Título Convención 2021
Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas
Coefficientes de corrección límites para la condición de interferencia en engranajes cilíndricos con contacto interior

α_{at2} : Ángulo de presión en el diámetro exterior de la rueda:

$$\tan(\alpha_{at2}) = \frac{\sqrt{d_{a2}^2 - d_{o2}^2}}{d_{o2}} \quad (3)$$

d_{a2} : Diámetro exterior de la rueda:

$$d_{a2} = d_{i1} + 2a_w + 2c^* \cdot m \quad (\text{mm}) \quad (4)$$

a_w : Distancia entre centros de la transmisión:

$$a_w = \frac{m(z_2 - z_1) \cdot \cos(\alpha_t)}{2\cos(\beta) \cdot \cos(\alpha_{wt})} \quad (\text{mm}) \quad (5)$$

d_{i1} : Diámetro del pie del diente del piñón:

$$d_{i1} = \frac{m \cdot z_1}{\cos(\beta)} + m(2x_1 - 2h_a^* - 2c^*) \quad (\text{mm}) \quad (6)$$

α_{wt} : Ángulo de presión en el diámetro primitivo, en el plano frontal, que se obtiene por la ecuación:

$$\text{inv}(\alpha_{wt}) = \frac{2(x_2 - x_1)\tan(\alpha)}{(z_2 - z_1)} + \text{inv}(\alpha_t) \quad (7)$$

d_{oM} : Diámetro de la circunferencia básica del piñón mortajador

$$d_{oM} = \frac{m \cdot z_M \cdot \cos(\alpha_t)}{\cos(\beta)} \quad (\text{mm}) \quad (8)$$

z_M : Número de dientes del piñón mortajador.

α_{wtM} : Ángulo de presión entre la rueda y el piñón mortajador en la máquina herramienta:

$$\text{inv}(\alpha_{wtM}) = \frac{2(x_2 - x_M)\tan(\alpha)}{(z_2 - z_M)} + \text{inv}(\alpha_t) \quad (9)$$

x_M : Coeficiente de corrección del piñón mortajador.

2. La interferencia de la cabeza del diente de la rueda con el pie del diente del piñón, que se evita si:

$$\begin{aligned} \frac{d_{o2}}{2} \tan(\alpha_{at2}) - \left(\frac{d_{o2}}{2} - \frac{d_{o1}}{2} \right) \tan(\alpha_{wt}) \\ \geq \frac{d_{o1}}{2} \tan(\alpha_t) - \frac{2d_{o1}(h_a^* + c^* - \rho^* + \rho^* \sin(\alpha) - x_1)\cos(\beta)}{z_1 \cdot \sin(2\alpha_t)} \end{aligned} \quad (10)$$

3. La interferencia radial, que se evita si se cumple la siguiente condición:



$$\frac{d_{a2}}{2} \operatorname{sen} \left(\varphi_2 + \frac{W_{a2}}{d_{a2}} \right) - \frac{d_{aM}}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{z_2}{z_M} \varphi_2 + \frac{S_{aM}}{d_{aM}} \right) > 0 \quad (11)$$

d_{aM} : Diámetro exterior del piñón mortajador

$$d_{aM} = \frac{m \cdot z_M}{\cos(\beta)} + 2m(h_a^* + c^* + x_M) \quad (\text{mm}) \quad (12)$$

S_{aM} : Espesor del diente en el plano frontal en el diámetro exterior del piñón mortajador:

$$S_{aM} = d_{aM} \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2} + 2x_M \cdot \tan(\alpha) \right)}{z_M} + \operatorname{inv}(\alpha_t) - \operatorname{inv}(\alpha_{atM}) \right) \quad (\text{mm}) \quad (13)$$

α_{atM} : Ángulo de presión en el diámetro exterior del piñón mortajador:

$$\tan(\alpha_{atM}) = \frac{\sqrt{d_{aM}^2 - d_{oM}^2}}{d_{oM}} \quad (14)$$

W_{a2} : Espesor del espacio entre dientes en el plano frontal en el diámetro exterior de la rueda:

$$W_{a2} = d_{a2} \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2} + 2x_2 \cdot \tan(\alpha) \right)}{z_2} + \operatorname{inv}(\alpha_t) - \operatorname{inv}(\alpha_{at2}) \right) \quad (\text{mm}) \quad (15)$$

El ángulo φ_2 determina la posición del diente de la rueda. Es una variable continua, que toma valores en el intervalo siguiente:

$$\gamma_2 - \frac{W_{a2}}{d_{a2}} \geq \varphi_2 \geq \alpha_{at2} - \frac{W_{a2}}{d_{a2}} \quad (16)$$

El ángulo γ_2 se obtiene por la siguiente ecuación:

$$\gamma_2 = \cos^{-1} \left(\frac{d_{a2}^2 + 4a_{wM}^2 - d_{aM}^2}{4d_{a2} \cdot a_{wM}} \right) \quad (17)$$

Se destaca además que cuando $\alpha_{at2} > \gamma_2$ la interferencia radial no tiene lugar.

El cálculo de los coeficientes de corrección límites se realiza para un valor de corrección sumaria (x_s) constante, que se obtiene por la ecuación 18, asignando valores al ángulo de presión en el diámetro primitivo, en el plano frontal (α_{wt}) en el intervalo de 0 a $\frac{\pi}{2}$.



$$x_s = \frac{(z_2 - z_1)}{2 \tan(\alpha)} (\text{Inv}(\alpha_{wt}) - \text{Inv}(\alpha_t)) \quad (18)$$

Para obtener los valores de los coeficientes de corrección, que limitan el intervalo donde se cumplen las condiciones 1, 10 y 11, se expresan estas ecuaciones en función de x_1 , teniendo en cuenta que los coeficientes de corrección de las ruedas están relacionados por la ecuación siguiente [1, 2]:

$$x_s = x_2 - x_1 \quad (19)$$

De esta manera, considerando las ecuaciones 4, 5 y 6, el diámetro exterior de la rueda resulta:

$$\frac{d_{a2}}{m} = \frac{cd_{a2}}{m} + 2x_1 \quad (20)$$

$$\frac{cd_{a2}}{m} = \frac{z_2}{\cos(\beta)} + \frac{(z_2 - z_1)}{\cos(\beta)} \left(\frac{\cos(\alpha_t)}{\cos(\alpha_{wt})} - 1 \right) - 2h_a^* \quad (21)$$

Asimismo, se considera conocido el intervalo de valores de los coeficientes de corrección del piñón x_1 , que garantiza que la raíz de la ecuación 3 sea siempre mayor que cero:

$$x_{1\text{Límite mínimo}} \leq x_1 \leq x_{1\text{Límite máximo}} \quad (22)$$

2.2. Valores límites de x_1 para el despuntado de la cabeza del diente de la rueda

La condición límite para el despuntado de la cabeza del diente de la rueda se expresa en función de x_1 por medio de las ecuaciones 1, 3 y 21:

$$\begin{aligned} \text{Desp}(x_1) = & \sqrt{\left(\frac{cd_{a2}}{m} + 2x_1\right)^2 - \left(\frac{d_{o2}}{m}\right)^2} - \left(\frac{d_{o2} - d_{oM}}{m}\right) \tan(\alpha_{Mwt}) \\ & - \frac{d_{oM} \cdot \tan(\alpha_t)}{m} + \frac{4d_{oM}(h^* - x_M)\cos(\beta)}{m \cdot z_M \cdot \sin(2\alpha_t)} \geq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Teniendo en cuenta que la variable α_{Mwt} es también una función de x_1 (ver ecuaciones 9 y 19), la primera derivada de la expresión 23 es:

$$\frac{d(\text{Desp}(x_1))}{dx_1} = \frac{2\left(\frac{cd_{a2}}{m} + 2x_1\right)}{\sqrt{\left(\frac{cd_{a2}}{m} + 2x_1\right)^2 - \left(\frac{d_{o2}}{m}\right)^2}} - \frac{(d_{o2} - d_{oM})}{m \cdot \sin^2(\alpha_{Mwt})} \frac{2 \tan(\alpha)}{(z_2 - z_M)} \quad (24)$$



La construcción de estas curvas para para los siguientes datos: $m=4$, $z_1=60$, $z_2=200$, $z_M=25$, $\beta=15,2028^\circ$, $x_M=0,25$, $\alpha_{wt}=20^\circ$ se muestra en la figura 1. La variable $x_1\text{Desp}_{\text{mínimo}}$ representa el valor de x_1 donde la función 23 tiene el valor mínimo. Asimismo, $x_{1\text{mínimoDesp}}$ y $x_{1\text{máximoDesp}}$ son los valores límites de x_1 dentro de los cuales no se cumple la condición 1.

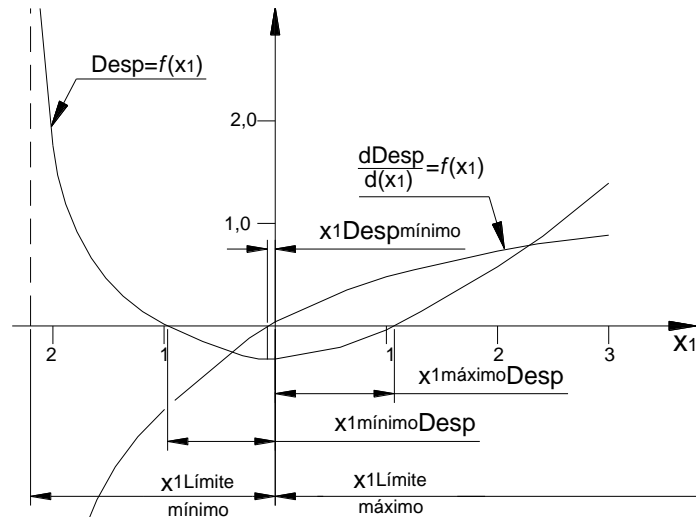


Figura 1. Dependencias $\text{Desp}(x_1) = f(x_1)$ y $\frac{d(\text{Desp}(x_1))}{dx_1} = f(x_1)$. Fuente: Elaboración propia

De esta manera, la secuencia de cálculo para obtener $x_{1\text{mínimoDesp}}$ y $x_{1\text{máximoDesp}}$ es la siguiente:

1. Se calcula $x_1\text{Desp}_{\text{mínimo}}$ aplicando el método de Hamming [11] a la ecuación 24 en el intervalo 22.

2. Se calcula el valor mínimo de la ecuación 23 evaluándola en el punto $x_1 = x_1\text{Desp}_{\text{mínimo}}$.

- Si $\text{Desp}(x_1\text{Desp}_{\text{mínimo}}) \geq 0$ significa que el despuntado de la cabeza del diente de la rueda no tiene lugar para ningún valor del coeficiente de corrección x_1 .
- Si $\text{Desp}(x_1\text{Desp}_{\text{mínimo}}) < 0$ se evalúa la ecuación 23 en el punto $x_1 = x_{1\text{Límite}}_{\text{mínimo}}$
 - Si $\text{Desp}\left(x_{1\text{Límite}}_{\text{mínimo}}\right) \leq 0$ se asume: $x_{1\text{mínimoDesp}} = x_{1\text{Límite}}_{\text{mínimo}}$.
 - Si $\text{Desp}\left(x_{1\text{Límite}}_{\text{mínimo}}\right) > 0$ el valor de $x_{1\text{mínimoDesp}}$ se obtiene aplicando el método de

Hamming a la ecuación 23 en el intervalo: $x_{1\text{Límite}}_{\text{mínimo}} \leq x_1 \leq x_1\text{Desp}_{\text{mínimo}}$



3. Se evalúa la ecuación 23 en el punto $x_1 = x_{1\text{Límite}} : \text{máximo}$

- Si $\text{Desp} \left(x_{1\text{Límite}} : \text{máximo} \right) \leq 0$ se asume: $x_{1\text{máximo}} \text{Desp} = x_{1\text{Límite}} : \text{máximo}$
- Si $\text{Desp} \left(x_{1\text{Límite}} : \text{máximo} \right) > 0$ el valor de $x_{1\text{máximo}} \text{Desp}$ se obtiene aplicando el método de Newton a la ecuación 23. Como punto de aproximación inicial se toma el valor medio del intervalo: $x_1 \text{Desp}_{\text{mínimo}} \leq x_1 \leq x_{1\text{Límite}} : \text{máximo}$

2.3.Límites de x_1 para la Interferencia de la cabeza del diente de la rueda con el pie del diente del piñón

La condición límite para la interferencia de la cabeza del diente de la rueda con el pie del diente del piñón se expresa en función de x_1 por medio de las expresiones 3, 10 y 20:

$$\text{Int}_{2,1}(x_1) = \sqrt{\left(\frac{cd_{a2}}{m} + 2x_1\right)^2 - \left(\frac{d_{o2}}{m}\right)^2} - \left(\frac{d_{o2} - d_{o1}}{m}\right) \tan(\alpha_{wt}) - \frac{d_{o1}}{m} \tan(\alpha_t) + \frac{4d_{o1}(h^* - x_1)\cos(\beta)}{m \cdot z_1 \cdot \text{sen}(2\alpha_t)} \geq 0 \quad (25)$$

Donde: $h^* = ha^* + c^* - \rho^* + \rho^* \text{sen}(\alpha)$ (26)

La construcción de esta curva para los siguientes datos: $m=4, z_1=60, z_2=200, z_M=25, \beta=15,2028^\circ, x_M=0,25, \alpha_{wt}=23^\circ$ se muestra en la figura 2. Se observa que es similar, aunque de signo contrario, a la curva del despuntado del diente. Aquí, sin embargo, los valores límites de x_1 se obtienen por expresiones analíticas al reducir la ecuación 25 a una expresión de segundo grado de la forma: $a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 = 0$:

$$x_{1\text{Mínimo}} \text{Int}_{21} = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \quad (27)$$

$$x_{1\text{Máximo}} \text{Int}_{21} = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \quad (28)$$

Dónde:

$$a_2 = 4 - B_1^2 \quad a_1 = 4 \frac{cd_{a2}}{m} + 2B_1 \cdot B_0 \quad a_0 = \left(\frac{cd_{a2}}{m}\right)^2 - \left(\frac{d_{o2}}{m}\right)^2 - B_0^2$$



$$b_1 = \frac{4d_{o1} \cdot \cos(\beta)}{m \cdot z_1 \cdot \sin(2\alpha_t)} \quad b_o = b_1 \cdot h^* - \left(\frac{d_{o2} - d_{o1}}{m}\right) \tan(\alpha_{wt}) - \frac{d_{o1}}{m} \tan(\alpha_t)$$

El valor de x_1 , donde la función 25 tiene un valor máximo, se obtiene al hallar la raíz de su primera derivada:

$$x_{1Int_{21}máximo} = \frac{d_{o2} \cdot b_1}{2m} \sqrt{\frac{1}{(b_1^2 - 4)}} - \frac{cd_{a2}}{2m} \quad (29)$$

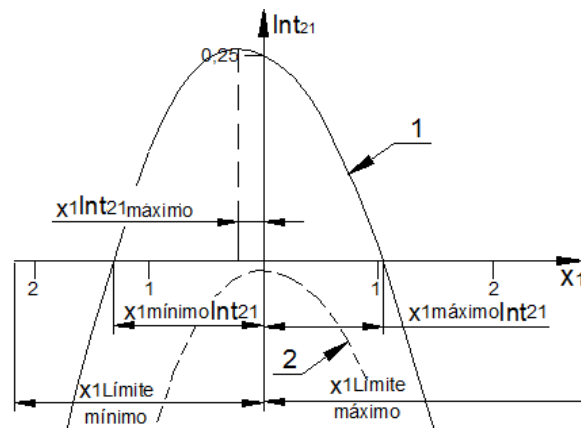


Figura 2. Dependencias $Int_{21}(x_1) = f(x_1)$. Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, la secuencia de cálculo para obtener $x_{1Mínimo}Int_{21}$ y $x_{1Máximo}Int_{21}$ es la siguiente:

1. Se calcula $x_{1Int_{21}máximo}$ por la ecuación 29.
2. Se calcula el valor máximo de la ecuación 25 evaluando esta función en el punto: $x_1 = x_{1Int_{21}máximo}$.
 - Si $Int_{2,1}(x_{1Int_{21}máximo}) \leq 0$ significa (curva 2 en la figura 2) que no es posible evitar la interferencia entre los perfiles y se abandona el cálculo.
 - Si $Int_{2,1}(x_{1Int_{21}máximo}) > 0$ se calculan $x_{1Mínimo}Int_{21}$ y $x_{1Máximo}Int_{21}$ por las ecuaciones 27 y 28.

2.4. Límites de x_1 para la Interferencia radial

La condición matemática, que garantiza se evite la interferencia radial, se expresa en función de x_1 por medio de las ecuaciones 3, 11, 15, 19 y 20:

$$Int_{Radial_{2M}}(x_1, \varphi_2) = \left(\frac{cd_{a2} + 2x_1}{m}\right) \sin(K) - \frac{d_{aM}}{2} \sin\left(\frac{z_2}{z_M} \varphi_2 + \frac{Sa_M}{d_{aM}}\right) > 0 \quad (30)$$



Dónde:

$$K = \varphi_2 + \frac{\left(\frac{\pi}{2} + 2(x_s + x_1) \cdot \tan(\alpha)\right)}{z_2} + \text{inv}(\alpha_t) - \frac{\sqrt{\left(\frac{cd_{a2}}{m} + 2x_1\right)^2 - \left(\frac{d_{o2}}{m}\right)^2}}{\frac{d_{o2}}{m}} \quad (31)$$

$$+ \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\left(\frac{cd_{a2}}{m} + 2x_1\right)^2 - \left(\frac{d_{o2}}{m}\right)^2}}{\frac{d_{o2}}{m}} \right)$$

A diferencia del resto de las limitaciones geométricas estudiadas, los valores límites del coeficiente de corrección del piñón, que garantizan se evite la interferencia radial entre el piñón mortajador y la rueda, tienen que cumplirse para cualquier valor del ángulo de rotación φ_2 . Ello implica que la ecuación 30 debe ser analizada como una función de dos variables. Por tanto, sus derivadas parciales son:

$$\frac{d\left(\text{Int}_{\text{Radial}_{2M}}(x_1, \varphi_2)\right)}{d\varphi_2} = \left(\frac{cd_{a2}}{m} + 2x_1\right) \cos(K) - \frac{z_2 \cdot d_{aM}}{2z_M} \cos\left(\frac{z_2}{z_M} \varphi_2 + \frac{S_{aM}}{d_{aM}}\right) \quad (32)$$

$$\frac{d\left(\text{Int}_{\text{Radial}_{2M}}(x_1, \varphi_2)\right)}{dx} = \text{sen}(K) + \left(\frac{cd_{a2}}{m} + 2x_1\right) \cos(K) \left(\frac{d(K)}{dx_1}\right) \quad (33)$$

Dónde:

$$\frac{d(K)}{dx_1} = \frac{2 \cdot \tan(\alpha)}{z_2} - \frac{2 \left(\frac{cd_{a2}}{m} + 2x_1\right)}{\frac{d_{o2}}{m} \sqrt{\left(\frac{cd_{a2}}{m} + 2x_1\right)^2 - \left(\frac{d_{o2}}{m}\right)^2}} \quad (34)$$

$$+ \frac{2 \frac{d_{o2}}{m}}{\left(\frac{cd_{a2}}{m} + 2x_1\right) \sqrt{\left(\frac{cd_{a2}}{m} + 2x_1\right)^2 - \left(\frac{d_{o2}}{m}\right)^2}}$$

En la figura 3 se muestra la forma en que varía la ecuación 30 para los siguientes datos: $m=4$, $z_1=160$, $z_2=200$, $z_M=185$, $\beta=15,2028^\circ$, $x_M=0,25$, $\alpha_{wt}=10^\circ$. Aquí la variable



Título Convención 2021
Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas
Coefficientes de corrección límites para la condición de interferencia en engranajes cilíndricos con contacto interior

$\varphi_2 \text{Int}_{\text{Radial}_{2M_mínimo}}$ representa la coordenada φ_2 donde la función $\text{Int}_{\text{Radial}_{2M}}$ es mínima para un valor constante de x_1 . Asimismo, la variable $x_1 \text{Int}_{\text{Radial}_{2M_máximo}}$ es la coordenada de x_1 donde la función $\text{Int}_{\text{Radial}_{2M}}$ es máxima para un valor constante de φ_2 . Se puede afirmar entonces que la combinación más desfavorable de la función $\text{Int}_{\text{Radial}_{2M}}$ es la que se obtiene para el valor de $\varphi_2 = \varphi_2 \text{Int}_{\text{Radial}_{2M_mínimo}}$ lo que convierte la ecuación 30 en una función dependiente de x_1 solamente: $\text{Int}_{\text{Radial}_{2M}}(x_1, \varphi_2 \text{Int}_{\text{Radial}_{2M_mínimo}})$ (figura 4). Esta función permite obtener el menor de los valores máximos ($\text{Int}_{\text{Radial}_{2M_máximo_menor}}$) de la ecuación 30 y con ello los valores límites $x_{1\text{mínimo}} \text{Int}_{\text{Radial}_{2M}}$ y $x_{1\text{máximo}} \text{Int}_{\text{Radial}_{2M}}$ donde no existe interferencia radial entre la herramienta de corte y el semiproducto de la rueda.

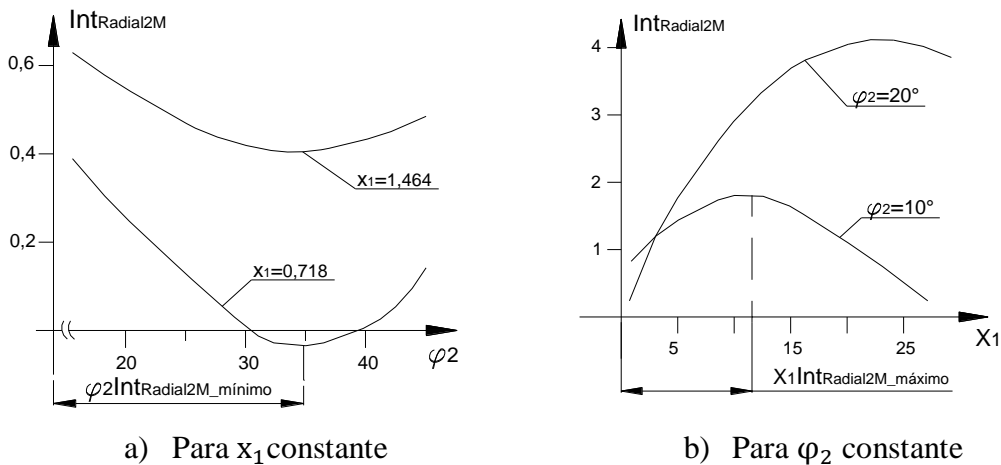


Figura 3. $\text{Int}_{\text{Radial}_{2M}} = f(x_1, \varphi_2)$. Fuente: Elaboración propia

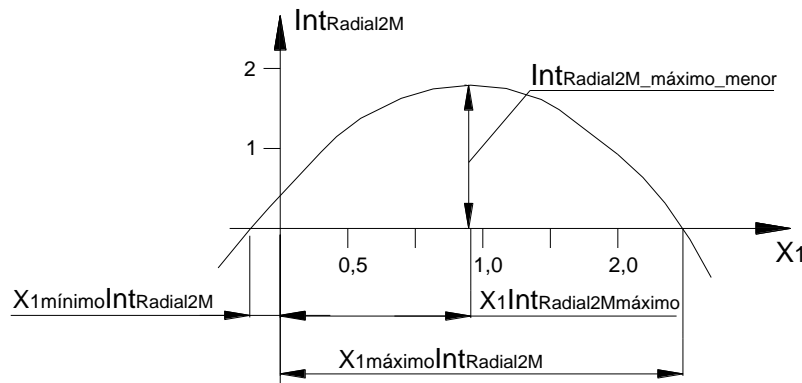


Figura 4. $\text{Int}_{\text{Radial}_{2M}} = f(x_1, \varphi_2 \text{Int}_{\text{Radial}_{2M_mínimo}})$. Fuente: Elaboración propia.



Teniendo en cuenta que los valores de φ_2 están limitados por la ecuación 16, primeramente se debe garantizar que el argumento del coseno inverso de la ecuación 17 se encuentre entre -1 y 1. Por tanto, se tiene que cumplir la condición siguiente:

$$-1 < \left(\frac{d_{a2}^2 + 4a_{wM}^2 - d_{aM}^2}{4d_{a2} \cdot a_{wM}} \right) < 1 \quad (35)$$

De donde se obtiene:

$$f_1(x_1) = d_{a2}^2 - 4d_{a2} \cdot a_{wM} + 4a_{wM}^2 - d_{aM}^2 < 0 \quad (36)$$

$$f_2(x_1) = d_{a2}^2 + 4d_{a2} \cdot a_{wM} + 4a_{wM}^2 - d_{aM}^2 > 0 \quad (37)$$

Las expresiones anteriores son ecuaciones de segundo grado con respecto a d_{a2} , que se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\text{Para } f_1 \quad \left(\frac{d_{a2}}{2} - a_{wM} - \frac{d_{aM}}{2} \right) \left(\frac{d_{a2}}{2} - a_{wM} + \frac{d_{aM}}{2} \right) < 0 \quad (38)$$

$$\text{Para } f_2 \quad \left(\frac{d_{a2}}{2} + a_{wM} - \frac{d_{aM}}{2} \right) \left(\frac{d_{a2}}{2} + a_{wM} + \frac{d_{aM}}{2} \right) > 0 \quad (39)$$

Se puede comprobar que el incumplimiento de las condiciones 36 y 37 (38 y 39) significa que los parámetros geométricos de la transmisión que se calcula corresponden a una transmisión cuya síntesis no es posible. Así, para la expresión 36 (38) se tiene:

Esta expresión es siempre menor que cero ya que la suma del radio exterior de la herramienta y la distancia entre centros es siempre mayor que el radio exterior de la rueda.

$$\left(\frac{d_{a2}}{2} - a_{wM} - \frac{d_{aM}}{2} \right) \rightarrow x_{1\text{maximo}} f_1:$$

Esta expresión es siempre mayor que cero ya que la distancia entre centros es siempre menor que el radio exterior de la rueda.

$$\left(\frac{d_{a2}}{2} - a_{wM} + \frac{d_{aM}}{2} \right) \rightarrow x_{1\text{minimo}} f_1:$$

De igual manera sucede en el caso de la condición 37 (39):

Esta expresión es siempre mayor que cero ya que el diámetro exterior de la rueda es siempre mayor que el diámetro exterior del piñón mortajador.

$$\left(\frac{d_{a2}}{2} + a_{wM} - \frac{d_{aM}}{2} \right) \rightarrow x_{1\text{mayor}} f_2:$$

Esta expresión es siempre mayor que cero ya que todos los miembros de la misma son mayores que

$$\left(\frac{d_{a2}}{2} + a_{wM} + \frac{d_{aM}}{2} \right) \rightarrow x_{1\text{menor}} f_2:$$



cero.

En la figura 5 se muestra la forma general en que se comportan las curvas 36 y 37. Aquí $x_{1\text{mínimo}f_1}$ y $x_{1\text{máximo}f_1}$ definen el intervalo de x_1 donde se cumple la condición 36, mientras que $x_{1\text{menor}f_2}$ y $x_{1\text{mayor}f_2}$ limitan los valores de x_1 donde no se cumple la condición 37.

Del estudio de la forma en que varían las curvas 36 y 37 para diferentes combinaciones de datos, así como también del análisis de sus raíces (38 y 39) se puede concluir que $x_{1\text{máximo}f_1}$ tiene siempre el mayor valor y $x_{1\text{menor}f_2}$ el menor. Ello se puede comprobar al analizar los signos delante de la distancia entre centros y el diámetro exterior de la herramienta en las ecuaciones 38 y 39. Por otro lado, no sucede así con las raíces $x_{1\text{mayor}f_2}$ y $x_{1\text{mínimo}f_1}$. Estas variables pueden ser una mayor que la otra en dependencia de los parámetros de la transmisión que se calcula. No obstante a ello, se insiste en que $x_{1\text{mínimo}f_1}$ nunca será menor que $x_{1\text{menor}f_2}$. Esta circunstancia permite excluir de la búsqueda de los límites de x_1 donde se cumple la condición 35 aquellos valores menores que $x_{1\text{menor}f_2}$ ya que en este caso la condición 36 (38) nunca se cumplirá. De esta manera, se puede concluir que el intervalo buscado está definido solamente por los valores de las raíces $x_{1\text{mínimo}f_1}$, $x_{1\text{máximo}f_1}$ y $x_{1\text{mayor}f_2}$.

Así, para que se cumpla la condición 36, los valores límites $x_{1\text{Límite}}^{\text{mínimo}}$ y $x_{1\text{Límite}}^{\text{máximo}}$ se rectifican por la siguiente secuencia de cálculo:

1. Se calcula el valor de x_1 mínimo que garantiza que el diámetro exterior del piñón mortajador sea menor que el diámetro exterior de la rueda. Se utiliza la siguiente expresión que se obtiene a partir de la ecuación 12:

$$x_{1\text{mínimo}}d_{aM} = \frac{d_{aM}}{2m} - \frac{cd_{a2}}{2m} \quad (40)$$

Se rectifica el valor de la variable $x_{1\text{Límite}}^{\text{mínimo}}$:

Si $x_{1\text{Límite}}^{\text{mínimo}} < x_{1\text{mínimo}}d_{aM}$ Se toma: $x_{1\text{Límite}}^{\text{mínimo}} = x_{1\text{mínimo}}d_{aM}$

Y se comprueba la existencia o no del intervalo 22.

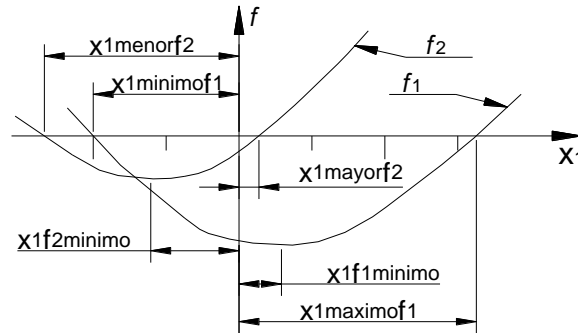


Figura 5. Dependencias $f_1(x_1)$ y $f_2(x_1)$ para el caso general. Fuente: Elaboración propia.

- Se calcula la coordenada $x_1 f_{1\text{mínimo}}$ donde la función f_1 tiene el valor mínimo en el intervalo 22 utilizando la primera derivada de f_1 :

$$\frac{df_1(x_1)}{d(x_1)} = 4(2a_{wM} - d_{a2}) \left(\frac{\cos(\alpha_t) \cdot \tan(\alpha)}{\cos(\beta) \cdot \text{sen}(\alpha_{wtM})} - 1 \right) \quad (41)$$

Se procede como se indica a continuación:

Si $\frac{df_1(x_{1\text{Límite}})}{d(x_1)} \frac{df_1(x_{1\text{Límite}})}{d(x_1)} \geq 0$ Se toma:

$$x_1 f_{1\text{mínimo}} = x_{1\text{Límite}} \text{ máximo} \quad \text{si: } f_1(x_{1\text{Límite}} \text{ mínimo}) > f_1(x_{1\text{Límite}} \text{ máximo})$$

$$x_1 f_{1\text{mínimo}} = x_{1\text{Límite}} \text{ mínimo} \quad \text{si: } f_1(x_{1\text{Límite}} \text{ mínimo}) < f_1(x_{1\text{Límite}} \text{ máximo})$$

Si $\frac{df_1(x_{1\text{Límite}})}{d(x_1)} \frac{df_1(x_{1\text{Límite}})}{d(x_1)} < 0$ Se calcula $x_1 f_{1\text{mínimo}}$ aplicando el método de Hamming a la ecuación 41.

- Se evalúa la función f_1 en el punto $x_1 f_{1\text{mínimo}}$: Si $f_1(x_1 f_{1\text{mínimo}}) \geq 0$ se abandona el cálculo ya que no hay posibilidad de síntesis de la transmisión.

- Se evalúa la función f_1 en el punto $x_{1\text{Límite}} \text{ mínimo}$:

Si $f_1(x_{1\text{Límite}} \text{ mínimo}) \leq 0$ se toma: $x_{1\text{mínimo}} f_1 = x_{1\text{Límite}} \text{ mínimo}$

Si $f_1(x_{1\text{Límite}} \text{ mínimo}) > 0$ se calcula $x_{1\text{mínimo}} f_1$ utilizando el método de la bisección aplicado

al intervalo $x_{1\text{Límite}} \text{ mínimo} \div x_1 f_{1\text{mínimo}}$ y se toma: $x_{1\text{Límite}} \text{ mínimo} = x_{1\text{mínimo}} f_1$

- Se evalúa la función f_1 en el punto $x_{1\text{Límite}} \text{ máximo}$:



Si $f_1 \left(x_{1\text{Límite}}^{\text{máximo}} \right) \leq 0$ se toma: $x_{1\text{máximo}} f_1 = x_{1\text{Límite}}^{\text{máximo}}$

Si $f_1 \left(x_{1\text{Límite}}^{\text{máximo}} \right) > 0$ se calcula $x_{1\text{máximo}} f_1$ utilizando el método de la bisección aplicado al intervalo $x_{1f_1\text{mínimo}} \div x_{1\text{Límite}}^{\text{máximo}}$ y se toma: $x_{1\text{Límite}}^{\text{máximo}} = x_{1\text{máximo}} f_1$

6. Se calcula la coordenada $x_{1f_2\text{mínimo}}$ donde la función f_2 tiene el valor mínimo en el intervalo 22 utilizando la primera derivada de f_2 :

$$\frac{df_2(x_1)}{d(x_1)} = 4(2a_{wM} + d_{a2}) \left(\frac{\cos(\alpha_t) \cdot \tan(\alpha)}{\cos(\beta) \cdot \text{sen}(\alpha_{wtM})} + 1 \right) \quad (42)$$

Se procede como se indica a continuación:

Si $\frac{df_2 \left(x_{1\text{Límite}}^{\text{mínimo}} \right)}{d(x_1)} \frac{df_2 \left(x_{1\text{Límite}}^{\text{máximo}} \right)}{d(x_1)} \geq 0$ se toma: $x_{1f_2\text{mínimo}} = x_{1\text{Límite}}^{\text{mínimo}}$

Si $\frac{df_2 \left(x_{1\text{Límite}}^{\text{mínimo}} \right)}{d(x_1)} \frac{df_2 \left(x_{1\text{Límite}}^{\text{máximo}} \right)}{d(x_1)} < 0$ se calcula $x_{1f_2\text{mínimo}}$ aplicando el método de Hamming a la ecuación 42.

7. Se evalúa la función f_2 en el punto $x_{1f_2\text{mínimo}}$:

Si $f_2(x_{1f_2\text{mínimo}}) \geq 0$ significa que la condición 37 se cumple para cualquier valor de x_1 .

8. Si $f_2(x_{1f_2\text{mínimo}}) < 0$ se evalúa la función f_2 en el punto $x_{1\text{Límite}}^{\text{máximo}}$:

Si $f_2 \left(x_{1\text{Límite}}^{\text{máximo}} \right) \leq 0$ se abandona el cálculo ya que no hay posibilidad de síntesis de la transmisión.

Si $f_2 \left(x_{1\text{Límite}}^{\text{máximo}} \right) > 0$ se calcula $x_{1\text{mayor}} f_2$ utilizando el método de la bisección aplicado al intervalo $x_{1f_2\text{mínimo}} \div x_{1\text{Límite}}^{\text{máximo}}$ y se toma: $x_{1\text{Límite}}^{\text{mínimo}} = x_{1\text{mayor}} f_2$.

Después de obtener el intervalo 22 corregido para cumplir la condición 35 es necesario rectificarlo nuevamente para considerar los límites que establece la ecuación 16. Esta expresión indica que la comprobación de la interferencia radial debe realizarse para los valores del ángulo φ_2 dentro de los siguientes límites:

$$\varphi_{2\text{mínimo}} = \alpha_{at2} - \frac{W a_2}{d_{a2}} \quad (43)$$



$$\varphi_{2\text{máximo}} = \gamma_2 - \frac{W a_2}{d_{a2}} \quad (44)$$

Las expresiones anteriores se pueden expresar también de la siguiente forma:

$$\Delta\varphi_2(x_1) = \varphi_{2\text{máximo}} - \varphi_{2\text{mínimo}} \geq 0 \quad (45)$$

Y considerando las ecuaciones 17, 43 y 44 se obtiene:

$$\Delta\varphi_2(x_1) = \cos^{-1}\left(\frac{d_{a2}^2 + 4a_{wM}^2 - d_{aM}^2}{4d_{a2} \cdot a_{wM}}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{d_{o2}}{d_{a2}}\right) \geq 0 \quad (46)$$

Asimismo, su primera derivada es:

$$\frac{d\Delta\varphi_2(x_1)}{d(x_1)} = \frac{\frac{(d_{a2}^2 + 4a_{wM}^2 - d_{aM}^2)}{4d_{a2} \cdot a_{wM}} \left(2a_{wM} + d_{a2} \frac{da_{wM}}{d(x_1)}\right) - \frac{(d_{a2} + 2a_{wM} \frac{da_{wM}}{d(x_1)})}{d_{a2} \cdot a_{wM}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{d_{a2}^2 + 4a_{wM}^2 - d_{aM}^2}{4d_{a2} \cdot a_{wM}}\right)^2}} - \frac{2d_{o2}}{d_{a2}\sqrt{d_{a2}^2 - d_{o2}^2}} \quad (47)$$

Donde la primera derivada de la distancia entre centros es:

$$\frac{da_{wM}}{d(x_1)} = \frac{\cos(\alpha_t) \cdot \tan(\alpha)}{\cos(\beta) \sin(\alpha_{wtM})} \quad (48)$$

En la figura 6 se muestra la construcción de la curva 45 para una combinación definida de datos. Aquí, las variables $x_{1\text{mínimo}}\Delta\varphi_2$ y $x_{1\text{máximo}}\Delta\varphi_2$ limitan el intervalo de x_1 donde debe comprobarse la existencia o no de la interferencia radial.

Los valores de $x_{1\text{mínimo}}\Delta\varphi_2$ y $x_{1\text{máximo}}\Delta\varphi_2$ se obtienen por la siguiente secuencia de cálculo:

1. Se calcula la coordenada $x_1\Delta\varphi_{2\text{máximo}}$ donde la función $\Delta\varphi_2$ tiene el valor máximo en el intervalo 22. Se procede como se indica a continuación:

Si $\frac{d\Delta\varphi_2\left(x_{1\text{Límite}}^{\text{mínimo}}\right)}{d(x_1)} \frac{d\Delta\varphi_2\left(x_{1\text{Límite}}^{\text{máximo}}\right)}{d(x_1)} > 0$ se toma:

$$x_1\Delta\varphi_{2\text{máximo}} = x_{1\text{Límite}}^{\text{mínimo}} \quad \text{si:} \quad \Delta\varphi_2\left(x_{1\text{Límite}}^{\text{mínimo}}\right) > \Delta\varphi_2\left(x_{1\text{Límite}}^{\text{máximo}}\right)$$

$$x_1\Delta\varphi_{2\text{máximo}} = x_{1\text{Límite}}^{\text{máximo}} \quad \text{si:} \quad \Delta\varphi_2\left(x_{1\text{Límite}}^{\text{mínimo}}\right) < \Delta\varphi_2\left(x_{1\text{Límite}}^{\text{máximo}}\right)$$



Si $\frac{d\Delta\varphi_2(x_{1\text{Límite mínimo}})}{d(x_1)} \frac{d\Delta\varphi_2(x_{1\text{Límite máximo}})}{d(x_1)} < 0$ se obtiene $x_1\Delta\varphi_{2\text{máximo}}$ aplicando el método de Hamming a la ecuación 47.

2. Se evalúa la función $\Delta\varphi_2$ en el punto $x_1\Delta\varphi_{2\text{máximo}}$:

- Si $\Delta\varphi_2(x_1\Delta\varphi_{2\text{máximo}}) \leq 0$ significa que $\varphi_{2\text{máximo}} \leq \varphi_{2\text{mínimo}}$ y por tanto no existe interferencia radial.

3. Si $\Delta\varphi_2(x_1\Delta\varphi_{2\text{máximo}}) > 0$ se evalúa la función $\Delta\varphi_2$ en el punto $x_{1\text{Límite mínimo}}$:

- Si $\Delta\varphi_2(x_{1\text{Límite mínimo}}) \geq 0$ se toma: $x_{1\text{mínimo}}\Delta\varphi_2 = x_{1\text{Límite mínimo}}$

- Si $\Delta\varphi_2(x_{1\text{Límite mínimo}}) < 0$ se calcula $x_{1\text{mínimo}}\Delta\varphi_2$ aplicando el método de la bisección

a la ecuación 46 en el intervalo $x_{1\text{Límite mínimo}} \div x_1\Delta\varphi_{2\text{máximo}}$.

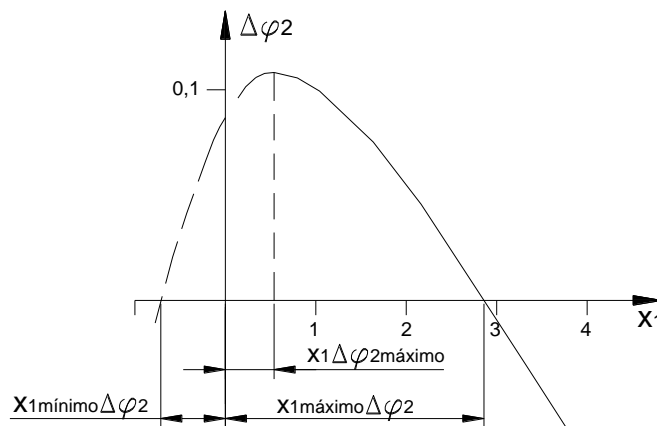


Figura 6. $\Delta\varphi_2(x_1)$ para $m=4$, $z_1=140$, $z_2=200$, $z_M=160$, $\beta=15,2028^\circ$, $x_M=0,25$, $\alpha_{wt}=15^\circ$. Fuente: Elaboración propia.

4. Se evalúa la función $\Delta\varphi_2$ en el punto $x_{1\text{Límite máximo}}$:

- Si $\Delta\varphi_2(x_{1\text{Límite máximo}}) \geq 0$ se toma: $x_{1\text{máximo}}\Delta\varphi_2 = x_{1\text{Límite máximo}}$

- Si $\Delta\varphi_2(x_{1\text{Límite máximo}}) < 0$ se calcula $x_{1\text{máximo}}\Delta\varphi_2$ utilizando el método de la bisección

aplicado a la ecuación 46 en el intervalo $x_1\Delta\varphi_{2\text{máximo}} \div x_{1\text{Límite máximo}}$.

Finalmente, los valores límites $x_{1\text{mínimo}}\text{Int}_{\text{Radial}_{2M}}$ y $x_{1\text{máximo}}\text{Int}_{\text{Radial}_{2M}}$ se calculan de acuerdo al siguiente procedimiento:



1. Se obtiene la coordenada $x_{1IntRadial_{2M_máximo}}$ donde la función $Int_{Radial_{2M}}(x_1, \varphi_2 Int_{Radial_{2M_mínimo}})$ es máxima calculando la raíz de la ecuación 30. Para ello se procede de la siguiente manera:

- Si:

$$\frac{d\left(Int_{Radial_{2M}}\left(x_{1Límite_mínimo}, \varphi_2 Int_{Radial_{2M_mínimo}}\right)\right)}{dx} > \frac{d\left(Int_{Radial_{2M}}\left(x_{1Límite_máximo}, \varphi_2 Int_{Radial_{2M_mínimo}}\right)\right)}{dx}$$

≥ 0

Se toma:

$$x_{1IntRadial_{2M_máximo}} = x_{1Límite_mínimo} \text{ si}$$

$$Int_{Radial_{2M}}\left(x_{1Límite_mínimo}, \varphi_2 Int_{Radial_{2M_mínimo}}\right) \leq Int_{Radial_{2M}}\left(x_{1Límite_máximo}, \varphi_2 Int_{Radial_{2M_mínimo}}\right)$$

$$x_{1IntRadial_{2M_máximo}} = x_{1Límite_máximo} \text{ si}$$

$$Int_{Radial_{2M}}\left(x_{1Límite_mínimo}, \varphi_2 Int_{Radial_{2M_mínimo}}\right) > Int_{Radial_{2M}}\left(x_{1Límite_máximo}, \varphi_2 Int_{Radial_{2M_mínimo}}\right)$$

- Si:

$$\frac{d\left(Int_{Radial_{2M}}\left(x_{1Límite_mínimo}, \varphi_2 Int_{Radial_{2M_mínimo}}\right)\right)}{dx} < \frac{d\left(Int_{Radial_{2M}}\left(x_{1Límite_máximo}, \varphi_2 Int_{Radial_{2M_mínimo}}\right)\right)}{dx}$$

< 0

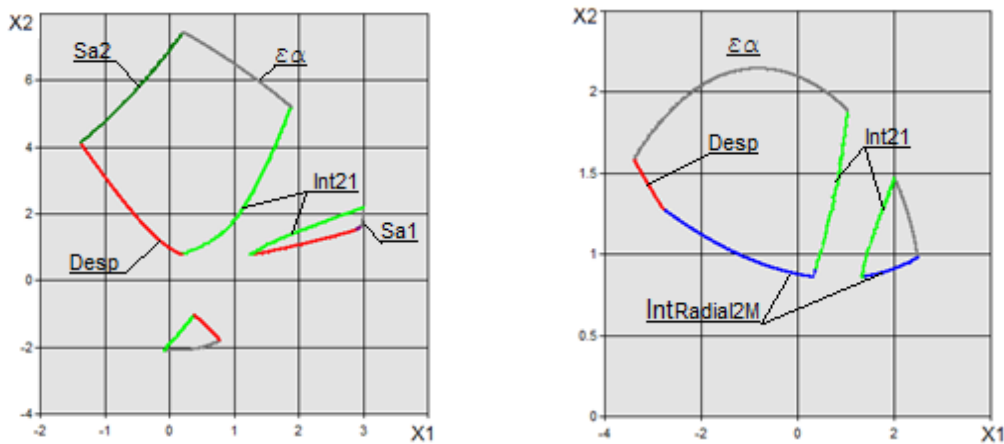
Se obtiene $x_{1IntRadial_{2M_máximo}}$ aplicando el método de la bisección a la ecuación 30.

2. Se calculan las raíces de la ecuación $Int_{Radial_{2M}}(x_1, \varphi_2 Int_{Radial_{2M_mínimo}})$ (Figura 4) utilizando el método de la bisección. Para el cálculo de $x_{1mínimo}Int_{Radial_{2M}}$ se utiliza el intervalo: $x_{1Límite_mínimo} \div x_{1IntRadial_{2M_máximo}}$ mientras que para obtener $x_{1máximo}Int_{Radial_{2M}}$ se utiliza el intervalo: $x_{1IntRadial_{2M_máximo}} \div x_{1Límite_máximo}$

3. Resultados y discusión



En la figura 7 se muestra la realización computacional del modelo matemático explicado anteriormente. Se han introducido además las curvas del factor de recubrimiento (ϵ_α) y del espesor mínimo del diente en el diámetro exterior del piñón (Sa_1) y de la rueda (Sa_2). Se destaca la ausencia de líneas auxiliares en el área gráfica ya que la construcción del contorno se ha realizado de forma no interactiva. Asimismo, los valores límites de los coeficientes de corrección no se toman del gráfico, sino que se obtienen de forma numérica por el modelo matemático.



a) $m=4, z_1=120, z_2=250, z_M=140, \beta=10^\circ, x_M=0,25$ b) $m=4, z_1=120, z_2=250, z_M=245, \beta=10^\circ, x_M=0,25$

Figura 7. Contorno de Bloqueo. Fuente: Elaboración propia.

4. Conclusiones

- La obtención de los coeficientes de corrección límites para la interferencia radial se realiza expresando las ecuaciones de estas limitaciones en función de x_1 . Primeramente, se calcula el valor de x_1 que corresponde al extremo de estas funciones. Seguidamente se obtiene dicho valor extremo y finalmente se calculan los valores de x_1 límites. Debido a la complejidad matemática de estas funciones los cálculos se realizan por medio de métodos numéricos. Se utilizan los métodos de la bisección, de Newton y de Hamming. En el caso de la interferencia de la cabeza del diente de la rueda con el pie del diente del piñón los valores límites de x_1 se calculan por expresiones analíticas.
- El modelo matemático desarrollado permite obtener el Contorno de Bloqueo para los diferentes tipos de interferencia de forma no interactiva. De esta manera resulta



posible la utilización de los resultados de la construcción del Contorno de Bloqueo de forma numérica.

5. Bibliografía

1. Bolotovskii, I. A. Bezrukov, O. F. Vacilieva, B. I. Cálculo Geométrico de Transmisiones de Perfil Evolvente por Engranajes y por Tornillo Sin Fin. 2da Edición, original en ruso, Moscú: Construcción de Maquinarias, 1986, 444 p.p. 28-138, ISBN 50689717-A
2. Litvin, F. L. Teoría de las transmisiones por engranajes, Editorial Ciencia, Moscú 1968
3. Sholeninov, V.E. Nikishin, S. M. "Síntesis de Engranajes Cilíndricos con Ayuda de la Computadora", original en ruso, Vestnik D.G.M.A., 2008, Vol. 14, N° 3E, p. 187-191, ISSN 1995 4794.
4. Nenov, P. Kaloyanov, B. Angelova, E. "Geometrical Blocking Contours as an Instrument for High-Technology Design of Geometry of Involute External and Internal Gear Drives" Mechanisms and Machine Science, 2013, Vol. 13, p. 379-388, ISSN 2211 0984.
5. Goldfarb, V. I. Tkachev, A. A. "Optimization Approach to Computer-Aided Design of Spur and Helical Gears" En: 13th World Congress in Mechanism and Machine Science, Guanajuato, México, 2011, p. 1-6, ISBN 9786074411317.
6. Dorofeev, D. V. Shevchenko, I. V. "Contornos de bloqueo en las transmisiones por engranajes proyectadas por el espesor del diente en el diámetro exterior", original en ruso, Ciencia y Educación, 2011 N° 4, p. 1-6, ISSN 1994 0408.
7. Kolotov, A. V. Merko, V. A. Mesnyankin, M. V. Mityaev, A. E. "Secuencia de obtención del sistema de coordenadas del Contorno de Bloqueo volumétrico para el aseguramiento de los indicadores de calidad del mecanismo planetario excéntrico 2K-h", original en ruso, Vestnik de la Universidad Técnica de Tadjikistan Osimi M. C., N° 1, Vol. 25, 2014, p. 13-18, ISSN 2075 177X.



Título Convención 2021
Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas
Coefficientes de corrección límites para la condición de interferencia en engranajes cilíndricos
con contacto interior

8. Němček, M "Design of a non-Standard Internal Gear Pair" Transactions of the VSB-Technical University of Ostrava, 2007, Vol. LII, N° 1, p. 141-145, ISSN 1210 0471.
9. Petrovskii, A. N. "Optimización de los parámetros del engranaje de perfil evolvente", original en ruso, NGTU Alexei, R. E., 2011, N° 2, p. 75-87.
10. Timofieyev, G. A. Samailova, M. V. "Zona de existencia de un Mecanismo Planetario de Onda", original en ruso, Vestnic MGTU Bauman, H. E., Serie: Construcción de Maquinaria, 2012, N° 2, p. 117-122, ISSN 0236 3941.
11. Burden, R. L. Faires, J. D. *Análisis Numérico*. 7da Edición, Traducido por: Palmas, O., Méjico: Thomson Learning 2002, 831 p.p. 55-65. ISBN 970-686-134-3